



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Inventering av bråk i modern didaktisk litteratur

Jessica Nilsson & Clas Holm

Matematik/ämnesdidaktik/LAU350

Handledare: Mikael Holmquist

Rapportnummer: VT07-2611-136

Abstract

Examensarbete inom lärarutbildningen 41-60 poäng/ 61-80 poäng

Titel: Inventering av bråk i didaktisk litteratur

Författare: Jessica Nilsson & Clas Holm

Termin och år: VT07

Kursansvarig institution: Sociologiska institutionen

Handledare: Mikael Holmquist

Examinator: Florentina Lustig

Rapportnummer: VT07-2611-136

Nyckelord: Bråk, bråkräkning, förförståelse, intelligenser, didaktik

Sammanfattning:

Inledning

Avsikten med arbetet är att söka igenom moderna svensk- och engelskspråkiga didaktiska texter för att se vad som finns skrivet om bråk och bråkräkning. Samt att belysa didaktiska aspekter såsom elevers förförståelse, vad som lyfts fram som viktigt för att förstå bråk/bråkräkning och huruvida det är svårt att lära sig eller undervisa om bråk. Vi redovisar de olika uppfattningar det finns om bråk vi funnit.

Metod

Kvalitativ innehållsanalys av matematikdidaktiska texter med syfte att lyfta fram didaktiska aspekter kring undervisning av bråk och bråkräkning. Analysen har utförts med följande frågeställningar: Om vi i litteraturen finner att elever har svårt med bråkräkning, har de svårare för detta än för räkning med tal representerade i annan form? Är det specifikt bråken de har problem med eller är det matematiken i sin helhet eller kanske skolan som sådan? Vad är det med bråk som är svårt? Ligger problemet hos lärare eller elever eller kanske någon annanstans? Varför skall vi undervisa om bråkräkning om det nu är så svårt? Vilka aspekter i litteraturen lyfts fram som viktiga för att öka elevers förståelse av bråk/bråkräkning?

Resultat

Vi finner bland annat att en enad författarkår är av uppfattningen att bråk och bråkräkning är problematisk. Vi har sammanställt de didaktiska aspekter vi hittat i texterna i en lista som förhoppningsvis kan vara till nytta för blivande och utövande lärare i deras matematikundervisning.

Slutsatser/Diskussion

Vi har funnit att det finns goda belägg för att undervisningen och inläringen av bråk blir bättre av att undervisningssituationen präglas av aktivt interagerande och varierar med hänsyn till de olika inlärningsstilarna. Vi har också sett exempel på redskap så som att bråket en halv med fördel kan användas som en utgångspunkt och referens då elever ofta har god förförståelse av detta.

Innehållsförteckning

1	Inledning	4
2	Syfte	4
3	Bakgrund	5
3.1	Varför bråk?	5
3.2	Kunskapsbegrepp	6
3.3	Olika sätt att lära sig på	7
3.4	Lärarens roll	8
4	Metod	9
4.1	Urval	9
4.2	Datainsamlingsmetoder	9
4.3	Procedur	9
4.4	Avgränsningar	10
4.5	Reliabilitet	11
4.6	Validitet	11
4.7	Generaliserbarhet	12
5	Resultat	12
5.1	Svenskspråkig litteratur	12
5.2	Utländsk litteratur	17
6	Resultatsammanfattning	20
6.1	Var har studier utförts?	20
6.2	Varför är bråk svårt?	20
6.3	Hur gör elever?	20
6.4	Vad är viktigt att tänka på?	20
6.5	Hur skall man göra?	20
6.6	Varför skall man lära sig bråk?	20
6.7	Var ligger problemet?	21
7	Diskussion	22
	Referenser	25

Bilaga 1

1 Inledning

När vi i olika sammanhang befunnit oss i grund- och gymnasieskolans matematikundervisning har vi uppfattat att elever har svårt att ta till sig kunskapen om bråkräkning. Vi för i denna uppsats inga resonemang kring vad begreppet kunskap innebär men det är intressant att notera följande citat: "Kunskap är inget entydigt begrepp. Kunskap kommer till uttryck i olika former - såsom fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet - som förutsätter och samspelar med varandra" (Skolverket, Läroplan för förskola, Lpfö 98, s. 6). Även om elever klarat av detta i ett tidigare skede under sin skolgång så verkar det vara en kunskap som är lättflyktig. Eftersom vi studerar på lärarutbildningen vid Göteborgs universitet har vi haft verksamhetsförlagd utbildning (VFU) vilka vi tillbringat i klasser från årskurs fyra till gymnasiet år tre. Dessutom har vi tillbringat tid i skolan som lärare och vikarierande lärare. Våra intryck är desamma oberoende av elevers ålder, vi uppfattar att bråkräkning väcker många elever stora bekymmer. Kan det vara så att vi har fått en felaktig bild av detta fenomen eller är det ett allmänt förekommande problem? Har det uppmärksammats i någon större undersökning så som PISA (Programme for International Student Assessment, OECD-projekt (Organisation for Economic Co-operation and Development)) eller sammanställning av resultat från nationella prov? Ligger problemet hos lärare, har dessa svårt att undervisa om ämnet eller är det av någon anledning speciellt svårt att lära sig bråkräkning för elever? Det var frågor av den här typen som fick oss att vilja skriva en C-uppsats i detta ämne.

Vårt valda ämne är av intresse då vi uppfattat det som att elever har problem med bråkräkning. Det är viktigt att lära sig bråkräkning för att kunna lära sig bland annat algebra. Som Wu (2000) skriver i en artikel så är det viktigt med bråkräkning och att ha en bra förståelse av bl.a. bråk för att klara av algebran i ett senare skede. Författaren menar att annars kommer algebran att bli: "... extremely difficult..." (Wu, 2000, s. 1). Vi vill försöka hitta orsakerna till problemet/problemen med bråk och se vilka aspekter på undervisning om bråk som finns i didaktisk litteratur. Med didaktisk litteratur avser vi texter som behandlar och problematiserar undervisning och inläring kring skolämnen, i detta fall specifikt bråkräkning inom skolämnet matematik. Förhoppningsvis kan en ökad förståelse av ämnet bidra till att stärka oss i vår blivande roll som lärare och därmed underlätta för våra blivande elever.

Engström (1997), som vi återkommer till under *resultat*, indikerar att bråk är komplext och att detta ställer till bekymmer för barn eftersom det är helt nytt för dem. Vi kommer att se att det finns texter som behandlar fler parametrar, inte bara elever. "Ett bråk måste ses som ett par av tal, dels som en enskild kvantitet. De tidiga erfarenheterna barn har av tal gör att de inte uppfattar mäktigheten, dvs. uppfattar bråk som ett tal" (Engström, 1997, s. 108). Detta är bara en av många författare som uppmärksammat problemet med bråk.

2 Syfte

Vårt syfte med denna uppsats kan delas upp i två delar: (a) Att genomsöka modern engelsk- och svenskspråkig facklitteratur inom det matematikdidaktiska området och rapporterade undersökningar fokuserad på bråkräkning, samt (b) Att lyfta fram de didaktiska aspekter på bråkräkning som vi finner i dessa texter. Med modern litteratur avser vi att de publicerats från år 1981 och framåt.

3 Bakgrund

3.1 Varför bråk?

I Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet (Lpo 94) under rubriken "Skolans uppdrag" står det: "En viktig uppgift för skolan är att ge överblick och sammanhang" (Skolverket, 2006, Lpo 94). En ökad förståelse för att samma tal kan skrivas på många olika sätt beroende på vad man vill uttrycka ökar rimligtvis ens förmåga att se sammanhang i uttryck som t.ex. en av tre svenskar äger en platt-TV, 64 procent har för avsikt att köpa en platt-TV, $\frac{7}{8}$ av Sveriges alla TV-innehavare betalar licens. Att kunna skriva och läsa siffror, proportioner och förhållanden mellan olika tal beroende på vilket sammanhang de används i är rimligtvis en kunskap som alla borde behärska för att kunna verka i ett demokratiskt samhälle. I Lpo 94 under rubriken "Mål att uppnå i grundskolan" står det: "Skolan ansvarar för att varje elev efter genomgången grundskola ... behärskar grundläggande matematiskt tänkande och kan tillämpa det i vardagslivet". Detta har i kursplanen för matematik under rubriken "Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det nionde skolåret" tolkas som: "... skall eleven- ha utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform" (Skolverket, 2000, kursplaner). För femte skolåret formuleras det som "- ha en grundläggande taluppfattning som omfattar naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform" (Skolverket, 2000, kursplaner). Här står det alltså svart på vitt att eleverna skall lära sig förstå att ett bråk inte är en division av ett heltal med ett annat heltal utan skall uppfattas som en helhet.

Kursplanen för matematik kurs A vilken så gott som alla elever läser på gymnasiet har följande kunskapsmål: "Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs: Eleven skall... ha fördjupat och vidgat sin taluppfattning till att omfatta reella tal skrivna på olika sätt" (Skolverket, 2000, kursplan MA1201). Eftersom tal i bråkform innefattas av benämningen reella tal är formuleringen så gott som identisk med de kunskapsmål som är uppsatta för årskurs nio i grundskolan. I Läroplan för de frivilliga skolformerna (Lpf 94) kan man läsa följande under rubriken "Skolans uppdrag": "Huvuduppgiften för de frivilliga skolformerna är att förmedla kunskaper" (Skolverket, 2006, Lpf 94). Kunskapen att kunna räkna med bråk är inte enbart viktig för att senare kunna utföra algebraiska operationer utan är även viktig för att få en vidgad taluppfattning. Vidare kan man läsa: "Elevernas kunskapsutveckling är beroende av om de får möjlighet att se sambandet att man kan representera samma tal på olika sätt" (Skolverket, 2006, Lpf 94), (Se diskussion om Lpo 94 ovan). Vidare kan vi i Lpf 94 läsa: "**Gymnasieskolan** skall med den obligatoriska skolan som grund fördjupa och utveckla elevernas kunskaper som förberedelse för yrkesverksamhet och studier vid universitet och högskolor..." (Skolverket, 2006, Lpf 94). Och som vi kommer att se under *resultat* så är man på universitet/högskola åtminstone på KTH (Kungliga Tekniska Högskolan) djupt bekymrad över vad man där upplever som gymnasieelevers bristande matematikkunskaper.

Styrdokumentet uttalar inte tydligt att eleverna skall kunna utföra räkneoperationer med tal i bråkform utan de talar enbart om att eleverna skall vidga sin taluppfattning till att omfatta reella och rationella tal. Men som vi redan funnit finns det åsikter om att det är nödvändigt att kunna utföra matematiska beräkningar med bråk för att kunna lära sig algebra.

Det framgår med all önskvärd tydlighet att elever efter avslutade kurser skall besitta kunskaper om bråk och vår tolkning är att de även skall kunna utföra matematiska operationer.

Hur får man då elever att lära sig det som skolan har som mål att de skall lära sig?

3.2 Kunskapsbegrepp

Jean Piaget (1896-1980) var konstruktivist och han ägnade sin vetenskapliga karriär åt att utforska hur man tar in kunskap eller uttryckt på ett annat sätt hur man lär sig saker om världen (Marton & Booth, 2000). Piaget var ursprungligen intresserad av hur kunskap bildas ur ett historiskt perspektiv men då han ansåg att det var för svårt att se tillbaka i tiden så valde han enligt Marton och Carlgren (2002) att fokusera på barns kognitiva utveckling (Carlgren & Marton, 2002). Han observerade att barn hela tiden lärde sig nya saker genom interaktion med sin omgivning. Piaget ansåg inte, till skillnad från flera av hans samtida, att kunskap redan fanns formad och klar att ta in och inte heller att kunskap är något medfött. Hur ansåg då Piaget att vi får kunskap? I Marton & Booth (2000) står det följande:

”Enligt Piaget konstruerar individen kunskapen genom sina handlingar, genom sitt samspel med omgivningen, med hjälp av ackommodationens kompletterande anpassningsmekanismer (individen anpassar sig till omgivningen) och assimilation (omgivningen justeras för att passa individen). I den processen utvecklas gradvis mer avancerade kunskapsnivåer” (s. 22).

Det är människan själv som konstruerar sin kunskap genom att interagera med övriga delar av samhället. Denna syn på kunskapsbildning benämns konstruktivism. I skolan har konstruktivismen under de senaste decennierna haft ett stort inflytande. Konsekvensen har blivit att elever intar en mer aktiv roll än tidigare på bekostnad av lärarens inflytande (Carlgren & Marton, 2002, s. 127). Lärarens aktiva roll har stor betydelse för vad elever lär sig eftersom det är läraren som bäst känner till vilka kunskaper som skall förmedlas och hur detta görs på bästa sätt. Läraren måste vara den drivande personen i undervisningen. Man kan inte lämna över allt ansvar på eleverna utan läraren har fortfarande huvudansvaret.

En annan av författarna skriver om ämnet och påpekar hur viktigt det är att vara socialt aktiv och själv söka efter kunskap för att kunna motta den (Engström, 1991). Människor konstruerar sin egen kunskap genom att vara en del av samhället. Men bara genom att vara med som en passiv medlem ger ingen ytterligare kunskap. Därför är det viktigt att dagens lärare verkar för att alla elever är aktiva på lektionerna.

I Lpo 94 står följande: ”Läraren skall ... utgå från varje enskild individs ... tänkande, ... organisera och genomföra arbetet så att eleven utvecklas efter sina förutsättningar...” (Skolverket, 2006, Lpo 94, s. 12). Och i Lpf 94 har man valt följande formulering: ”... undervisningens uppläggning, innehåll och arbetsformer anpassas efter elevernas skiftande behov och förutsättningar...” (Skolverket, 2006, Lpf 94, s. 16). Läraren måste följaktligen ta hänsyn till att elever är olika och lär sig på olika sätt.

Vi lär oss på olika sätt genom att aktivt interagera med varandra. Hur många olika sätt finns det att lära sig på?

3.3 Olika sätt att lära sig på

Det finns teorier om att alla människor använder sig av olika inlärningsstilar eller intelligenser då vi skall lära oss nya saker. Med detta avses det sätt man föredrar att använda då man tänker, förstår verkligheten och bearbetar information (Jensen, 1997, s. 40). År 1983 publicerades Howard Gardners bok med titeln *Frames of Mind – The Theory of Multiple Intelligences*, däri hävdar han att det finns minst sju olika typer av intelligenser som människor använder sig av vid inläring. Han menar också att det kunde finnas ytterligare två intelligenser men ansågs sig inte vid detta tillfälle ha tillräckligt med belägg för dessa. På senare tid har Gardner hittat belägg för ytterligare en intelligens, natur-intelligens, och har lagt till denna som den åttonde intelligensen (Gardner, 2003, s.7). En av Gardners efterföljare vid namn Lazear skriver att varje individ använder sig av en eller två intelligenser som den är extra duktig på (Lazear, 1998, s. 16). Enligt Gardner kan man utveckla sin förmåga att använda sig av fler intelligenser. Följaktligen kan lärare stimulera elever genom att tillhandahålla rätt hjälpmedel och förklara på olika sätt för individen så att de utvecklar sin förmåga att använda sig av flera intelligenser. Detta torde vara en bra teori för läraren att använda sig av när elever har svårt att ta till sig för dem ny kunskap så som bråkräkning. Gardners sju olika intelligenser sammanfattas av Lazear (1998, s. 14-16) vilka vi nedan presenterar i en förkortad version.

- **”Verbal-lingvistisk intelligens** ansvarar för språket och alla de komplexa möjligheter som det innehåller...”
- **”Logisk-matematisk intelligens** associerar oftast med det vi kallar ”vetenskapligt tänkande” eller induktivt resonerande även om deduktiva tankeprocesser också är involverade.”
- **”Visuell-spatial intelligens** handlar om sådant som visuella konstarter...”
- **”Kroppslig-kinestetisk intelligens** är förmågan att använda kroppen för att uttrycka känslor...”
- **”Musikalisk-rytmisk intelligens** består bland annat av förmågan att känna igen och använda rytmer och klangmönster...”
- **”Interpersonell intelligens** innebär bland annat förmågan att samarbeta i en grupp och även förmågan att kommunicera verbalt och icke-verbalt med andra människor.”
- **”Intrapersonell intelligens** innebär inre självkännedom”

Lazear (1998) skriver i sin bok hur man kan använda de multipla intelligenserna inom olika skolämne, se bilaga 1 för de idéer som direkt kan knytas till matematiklektioner. Lazear anger inte för vilka åldrar på elever han anser dessa idéer är lämpliga. Lazear har själv inte sammanfattat natur-intelligensen eftersom Gardner lanserade denna intelligens fyra år efter Lazears bok så nedan följer vår sammanfattning:

- **Natur-intelligens** – Förmåga att tyda och förstå hur naturens krafter har verkan på människors situationer. Förmåga att urskilja naturobservationer, identifiera och gruppera växter och djur i dess arter.

Gardner hävdar också att det kan finnas ytterligare en, den existentiella intelligensen men saknar än så länge belägg för denna (Gardner, 2003). Dessutom tror Gardner att det finns fler intelligenser som människor använder sig av och att framtida forskning kommer att visa om det förhåller sig på detta sätt (Gardner, 2003).

I dag går en stor del av undervisningen i skolor ut på att elever använder sig av läromedel i sitt lärande på bekostnad av interaktion med sina lärare och/eller klasskamrater. I rapporten Lusten att lära kan man läsa att det förekommer sällan eller aldrig gemensamma genomgångar där kommunikation lärare och elever äger rum (Skolverket, 2003). Om eleverna i skolan stimuleras att utveckla flera av sina intelligenser så har de större möjlighet att lyckas med sin skolgång. Det krävs då av lärare att de känner till teorin om inlärningsintelligenserna och använder sig av denna i sin undervisning.

Lärare möter elever som lär sig på olika sätt, lärare behöver redskap för att möta dessa behov.

Hur kan en lärare då använda sig av de olika inlärningsstilarna i undervisningen?

3.4 Lärares roll

Som vi redan sett i styrdokumentet för skolan har lärare en viktig uppgift i att hitta metoder för sin undervisning som skall passa alla elever. Lärare måste kunna variera sig för att kunna tillgodose elevers olikheter. Elever har olika erfarenheter/förkunskaper/förförståelse med sig när de kommer till skolan som lärare behöver ta hänsyn till. Vi erfar alla världen på olika sätt främst beroende på vad vi har varit med om tidigare. Detta är fenomenografins idé där forskningens grundenhet är: "... ett sätt att erfara någonting..." (Marton & Booth, 2000, s. 146). Elever måste få variation i sätten att erfara saker. Detta stämmer väl överens med vad Gardner skrivit. Eftersom elever har olika intelligenser och därmed lär på olika sätt är det ytterst viktigt att lärare varierar sin undervisning.

Det ligger på lärarens ansvar att försäkra sig om att alla elever får en undervisning som de förstår. En traditionell undervisning kan uppfattas enformig och ointressant av de elever som besitter en intelligens som inte tillgodoses. Vi kan därför inte prata om **en** bra metod att undervisa om bråkräkning på utan snarare om att en bra lärare behöver ha ett helt batteri av metoder för att tillgodose alla elevers behov. Eftersom varje skolklass har en unik sammansättning av elever så kan detta vara en av förklaringarna till att en metod som har fungerat bra i en klass inte fungerar i en annan. Därmed inte sagt att kombinationer av intelligenser i en klass är den enda förklaringen på detta fenomen.

Vad är det för kompetenser som en lärare behöver för att lyckas med undervisningen? Ahlberg (2001) skriver följande: "För att skapa optimala möjligheter till lärandet och deltagande för alla elever måste läraren ha kunskap i ämnet, didaktisk medvetenhet och förståelse för hur människor lär" (s. 27). Vi har ovan gett inblick i en av teorierna om hur människor lär, teorin om de åtta (eller kanske fler) intelligenserna. Under rubriken resultatsammanställning sammanfattar vi de didaktiska aspekterna som vi funnit.

4 Metod

4.1 Urval

Vårt primära intresse är att finna texter som behandlar aspekter av bråk och bråkräkning. I dessa texter lyfter vi ut och tolkar den information som specifikt rör bråk och bråkräkning. För detta arbete valde vi att genomföra en textanalys. Metoden anses vara lämplig för att urskilja kvaliteter ur olika texter på ett systematiskt sätt. "... an analysis of this kind would tell us more about the ... factors stressed or ignored..." (Cohen et al., 2000, s. 165). Metoden ger oss även möjligheten att få tillförlitliga och geografiskt spridda källor. Eftersom det funnits skolor och bråkräkning länge finns det redan data nedtecknad, vi behöver därmed inte samla ny data för ett nytt fenomen och dessutom finns internationella texter tillgängliga. Vi bedömde att en statistisk undersökning skulle begränsas av den tid vi har tillgänglig och tillförlitligheten skulle bli dålig. En intervju som metod skulle begränsa oss både i tid och rum. Metoden diskursanalys passar inte vårt syfte då denna metod främst används för att analysera kommunikation. Vår avsikt är att redovisa data i textform från spridda källor tolkade utefter specifika frågeställningar listade under *procedur*.

4.2 Datainsamlingsmetoder

Den textanalysmetod vi fann som mest lämplig att använda för vår undersökning är kvalitativ innehållsanalys (Bergström & Boréus, 2005). Denna analysmetod ger oss möjlighet att analysera innehållet i texterna utan att behöva tolka dem. Metoden ger oss möjlighet att läsa texterna utefter ett specifikt mönster vilket vi redovisar under *procedur*.

4.3 Procedur

För att identifiera för oss intressanta texter vilka vi behandlar under *resultat* valde vi att använda oss av två biblioteksdatabaser, GUNDA och Libris, och en Internet-sökmotor, Google scholar. Skälet till att välja dessa sorteringsverktyg var att vi ville utesluta texter från dagstidningar, populärvetenskap, bloggar på nätet etc. till förmån för mer akademiska publikationer så som doktorsavhandlingar och rapporter, facktidskrifter osv..

Ordlistan (ibland även kallat kodorden) som använts för att utföra urvalet har för biblioteksdataserna varit: biblioteksklassificeringskoden Eabt/+bråk respektive Eabt/+fraction. Biblioteksklassificeringskoden Eabt avser matematikdidaktik. För Internet-sökmotorn har motsvarande ordlista varit matematik/+bråk respektive mathematics/+fraction. Vi kom fram till dessa val av ord samt den hierarkiska ordningen av orden efter att vi utfört testsökningar då vi sökte efter texter med enstaka ord och granskat ett godtyckligt antal texter för att fastställa att de innehöll ett didaktiskt resonemang rörande bråkräkning/uppfattning. Dessutom har vi då vi förkovrat oss följt referenser vi funnit i texter då dessa har förekommit i direkt anslutning till i texten förekommande resonemang kring bråk. Texter som behandlat ämnet på ett övergripande sätt och inte behandlar bråk specifikt har valts bort då vi anser att tolkningsutrymmet annars blivit för stort. På grund av den tid som har funnits att disponera för detta arbetets genomförande, har vi begränsat oss till texter publicerade från och med 1981.

Texterna har granskats utefter följande frågeställningar:

- 1 Om vi i litteraturen finner att elever har svårt med bråkräkning, har de svårare för detta än för räkning med tal representerade i annan form? Denna fråga äger sin relevans i om vi kan se om bråk särskiljer sig i fråga om svårighet gentemot t.ex. decimaltal eller procent.
- 2 Är det specifikt bråken de har problem med eller är det matematiken i sin helhet eller kanske skolan som sådan? Det är inte orimligt att anta att om en elev uppfattar att matematik är svårt så kommer det även att visa sig att bråkräkning är svårt för eleven. Det är heller inte orimligt att anta att elever som har en negativ inställning till skolan som helhet eller inte trivs i den har svårare att inhämta kunskap om bråk.
- 3 Vad är det med bråk som är svårt? Vi genomsöker litteraturen för att få reda på om det finns teorier som förklarar varför bråk är svårt eller stöder att så verkligen är fallet. Om det i litteraturen finns olika åsikter om hur man uppfattar bråk redovisar vi detta och är det någon aspekt på bråk som är svårare att förstå än andra redovisar vi även det.
- 4 Ligger problemet hos lärare eller elever eller kanske någon annanstans? Eftersom de flesta människor i västvärlden har tillgång till miniräknare och mobiltelefoner som man kan räkna med så kan det vara så att bråkräkning har blivit omodernt. Bråk kanske inte används lika ofta i vårt moderna samhälle som decimaltal.
- 5 Varför skall vi undervisa om bråkräkning om det nu är så svårt? Vi redovisar de olika åsikter och argument för och emot bråkräkning som textförfattare ger utlopp för. Om det finns uppfattningar om vilka reella tal som är lämpliga att börja med och vilken ordning som skulle vara att föredra samt argument för detta redovisas
- 6 Vilka aspekter i litteraturen lyfts fram som viktiga för att öka elevers förståelse av bråk/bråkräkning? Då vi utför analysen på texterna tillför det oss som blivande lärare och läsaren en ökad didaktisk kunskap om vi tar tillvara de didaktiska kunskaperna som vi kan hitta.

4.4 Avgränsningar

Vi har på grund av våra bristande språkkunskaper varit tvungna att välja bort texter som inte finns skrivna eller översatta till engelska eller nordiskt språk (förutom isländska). Vi har aktivt valt bort litteratur som direkt avser små barns uppfattning av bråk då detta ligger utanför vår intressesfär. Även fallstudier har fått utgå då vi bara hittat ett fåtal av dessa och vår avsikt är att undersöka om det är ett allmänt problem. I den litteratur vi analyserat har det inte förekommit några aspekter på genus, etnicitet, sexuella preferenser etc. Vi avstår från att spekulera i om detta har betydelse för matematiken.

4.5 Reliabilitet

En risk med den valda metoden brukar i litteraturen betecknas med glidning (Bergström & Boréus, 2005, s. 50). Detta kan inträffa då man t.ex. jämför texter från olika tidsepoker, om man inte blandar dessa så är det lätt att man föredrar t.ex. texter skrivna med ett modernt ordval framför ålderdomliga texter som kan vara tunga att läsa och förstå. Bland våra analysenheter (artiklar/böcker/etc.) motsvaras detta av t.ex. doktorsavhandlingar respektive artiklar. Artikeln är ofta skriven på ett mer tilltalande sätt än doktorsavhandlingen. Det kan också uppfattas att det är mer tilltalande att läsa på svenska än engelska. För att minimera denna glidning har vi med avsikt valt att blanda litteraturen vid vår analys. Det kan anföras att det är en brist att vi inte utfört dubbelkodning korrekt. Dubbelkodning går till så att man analyserar en text och dokumenterar sina resultat. Efter en så lång tid så att man rimligtvis inte kommer ihåg hur man analyserade texten gör man om det igen. Om man har en korrekt struktur för analys blir resultatet detsamma. Den begränsade tiden för denna uppsats har inte medgett att vi med gott samvete skulle kunna hävda att vi glömt bort vad vi nyss gjort. För att kompensera detta har vi varit speciellt uppmärksamma på att våra tolkningar av texterna är samstämmiga och anser därmed att reliabiliteten är hög.

I de fall vi inte varit överrens har texten valts bort. Mängden av texter och författare talar för att ämnet är av intresse för ett stort antal forskare och artikelförfattare. Dessa forskare och författare har en god geografisk spridning inom västvärlden (Europa, Amerika etc.). Vi har också uppmärksammat att referenser återkommer i olika texter, detta indikerar att det finns en väl etablerad grupp av forskare och författare som intresserar sig för ämnet.

En viss form av språklig tolkning har skett av vissa texter då dessa är författade på engelska. Vi förlitade oss på att de två biblioteksdataserna och Internet-sökmotorn gav ett tillförlitligt urval. Eftersom vi är två personer med liknande utbildning så finns risken att vi tolkat texter på ett allt för lika sätt.

Vi har uppmärksammat att vi inte funnit någon text som uttryckt att bråkkunskaperna **inte** utgör något problem. Istället är det en så gott som enig författarkår som ger uttryck för bråkens besvärlighet. Möjligen har vår urvalsprincip exkluderat en del texter, men vi kan inte bortse från mängden och den geografiska spridningen av texter som tar upp ämnet.

4.6 Validitet

Mängden litteratur och spridningen av densamma talar för att vi fångat in en betydande del av de texter om bråk som finns publicerade. Vi har i dessa texter funnit olika åsikter om hur undervisningen skall utformas, uppfattningar om vari problemet/problemen ligger och olika uppfattningar om hur bråk skall uppfattas för att underlätta elevers förståelse. Det har alltså inte saknats didaktiska aspekter i texterna.

4.7 Generaliserbarhet

Huruvida bråk och bråkräkning är ett problem inom utbildningsväsendet i andra delar än västvärlden vet vi inte eftersom vi begränsat oss till litteratur på engelska eller nordiskt språk (förutom isländska) och att vi med denna begränsning exkluderat majoriteten av jordens befolkning. Att vi inte lyckats hitta någon kvantitativ undersökning som statistiskt säkerställer att t.ex. en majoritet av eleverna i 12-15 års ålder inte kan beräkna ett dubbelbråk finner vi märkligt med tanke på de stora undersökningar om matematik som gjorts (PISA, TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) etc.). Vi avstår från att spekulera om varför en sådan typ av undersökning inte går att finna. Mängden och spridningen av texterna vari vi hittat vårt resultat visar dock på att problem med att undervisa och lära sig bråk finns spritt inom västvärldens skolväsende från årskurs fyra till universitet och högskola.

5 Resultat

Inledningsvis redovisar vi här den textanalys vi genomfört med frågeställningarna under *procedur*. Indelningen av litteraturen är svensk och utländsk. Texterna är inbördes ordnade så att de så långt som möjligt ger läsaren ett sammanhang.

5.1 Svenskspråkig litteratur

Vårt första citat hämtar vi från Löwing som forskar om matematikdidaktik vid Göteborgs universitet. Författaren har uppmärksammat bråken och hon skriver i en rapport följande: ”Enligt varje rimlig tolkning av grundskolans kursplan i matematik bör alla elever i årskurs 7 veta att 8 halvor är lika mycket som 4 helheter. Trots detta klarar inte ens varannan elev i årskurs 7 den uppgiften i vår undersökning. Även resultaten i årskurs 9 är nedslående” (Löwing, 2002, s. 66). Detta indikerar att det finns stora brister i den grundläggande förståelsen av bråk hos många elever. Har man inte förståelsen så kan man heller inte ha färdigheten att utföra beräkningen $8 \cdot 1/2$. Ur samma rapport kan man även utläsa att eleverna har svårare att multiplicera bråk än tal i decimalform, nedan återges två tabeller vilka åskådliggör skillnaden (Löwing, 2002, s. 66).

”Uppgift	Rätt svar Skolår 6	Rätt svar Skolår 8
$4 \cdot 0,2$	75%	82%
$9 \cdot 1,5$	62%	65%
$300 \cdot 0,4$	60%	62%
$0,7 \cdot 50$	45%	51%

Uppgift	Rätt svar Skolår 7	Rätt svar Skolår 9
$8 \cdot 1/2$	45%	72%
$3/4 \cdot 2/5$	10%	42%
$1 \frac{1}{6} \cdot 4/5$	12%	34%”

Dessutom påpekar Löwing att: ”För det första är bråkräkning en nödvändig förkunskap till algebran” (Löwing, 2002, s. 18-19).

Fyra år senare uppmärksammar Löwing återigen bråken: "Ett område som vållar stora problem i skolan är bråkräkning" (Löwing, 2006, s. 84). Vidare skriver hon: "...räkning med bråk, decimalt och procent, tre områden som vållade stora problem under de observerade lektionerna..." (Löwing, 2006, s. 161). Huruvida bråkräkningen skulle vara svårare än decimal- och/eller procenträkning spekulerar inte Löwing om i denna bok heller. Däremot framhäver hon bråkräkningens legitimitet för bl.a.: "De elever som saknar basala kunskaper i bråkräkning kommer av det skälet att få stora svårigheter med att lära sig enkel algebra" (Löwing, 2006, s. 162). Löwing (2006, s. 168) menar att det särskilt krävs tre förkunskaper för att klara samtliga aritmetiska operationer vid arbete med tal i bråkform. Dessa är:

- "1. att förstå nämnarens innebörd..."
- "2. förstå täljarens innebörd"
- "3. att varje bråk kan skrivas på oändligt många sätt."

I följande citat skiftas fokus delvis till läraren. "Samtidigt som eleverna hade svårt att förstå, hade lärarna problem med att förklara på ett för eleverna begripligt sätt" (Löwing, 2006, s. 160). Löwing pekar här på lärares bristande kompetens, det föreligger då en risk att lärare väljer att lägga tyngdpunkten vid räkning med decimaltal på bekostnad av bråken. "En motivering till att man gör så här är att bråkräkning idag är sällsynt i vardagslivet" (Löwing, 2006, s. 168). Hon nämner också att det utbredda användandet av miniräknare gör att det blir mer naturligt att räkna med decimaltal.

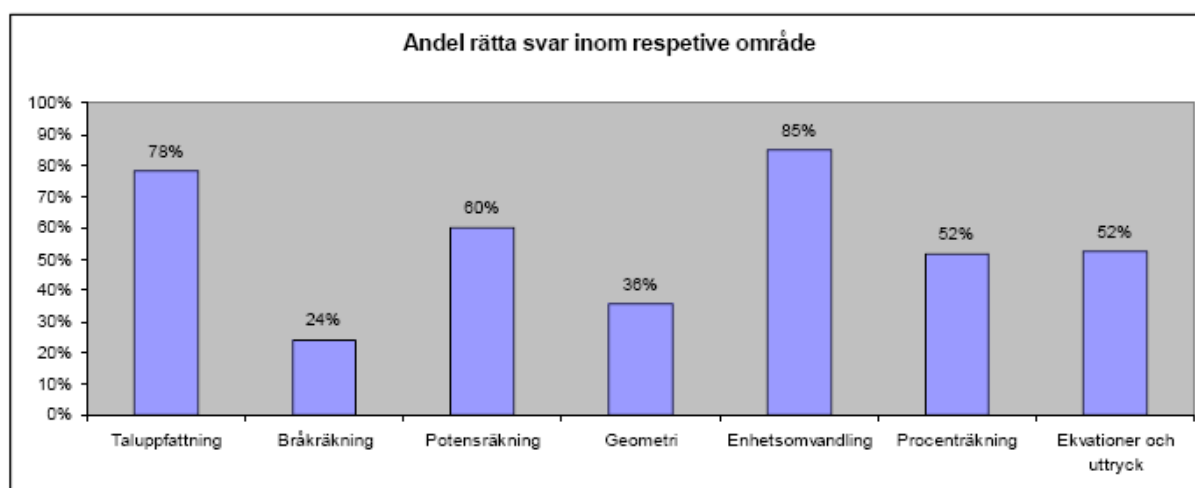
"Detta är det första "nya" talområdet utanför de naturliga heltalen som eleverna kommer i kontakt med. Tal i bråkform innebär för många elever det största steget från ett vardagstänkande till ett mer formellt tänkande. Det är emellertid ett moment som kan introduceras redan i de lägre klasserna. Barn kommer mycket tidigt i kontakt med uppdelning i sitt vardagsliv och använder begreppen lika mycket, hälften och halv" (Ahlberg, 2001, s. 66).

Författaren uttrycker här att det är ett stort steg att ta för elever när matematiken formaliseras. "För de flesta elever är vissa skeende i undervisningen mer kritiska än andra. På ett generellt plan handlar det om övergångar från ett vardagligt tänkande till det abstrakta matematiska symbolspråket" (Ahlberg, 2001, s. 63). Författaren uppmärksammar här att bråk och bråkräkning är en kritisk punkt i elevers matematiska utveckling.

Att grundskoleelever har problem med bråkräkning följer med dem till gymnasiet. I ytterliggare en rapport från Göteborgs universitet som behandlar gymnasieelevers matematikkunskaper kan vi läsa: "Andra orsaker som nämns är försämrade förkunskaper från grundskolan i bl.a. algebra och bråkräkning" (Johansson, 1998, s. 11). Här ser vi återigen kopplingen mellan bråk och algebra. Det är visserligen inte direkt uttalat att de hänger samman/hör ihop men vi tycker att det är intressant att de nämns i samma mening.

I ett examensarbete av två studerande på lärarutbildningen vid Växjö universitet (Ericsson & Fredriksson, 2006) visar de att många elever i Småland uppvisar liknande problem med bråken. Författarna har använt sig av en anonym diagnos. Urvalsgruppen på 150 personer valdes bland de elever vilka läste sitt första år på gymnasiet. Omsorg lades vid att få ett så brett urval som möjligt från olika program. Slutsatserna i uppsatsen är baserade på diagnoser. Författarna har tolkat sitt resultat så att de elever som kommer till gymnasieskolan med ett betyg G (godkänt) från grundskolan har svårare för bråkräkning än de elever som har ett högre betyg med sig från grundskolan. "... många elever saknar tillräckliga baskunskaper för att klara bråkräkning" (Ericsson & Fredriksson, 2006, s. 2). Dessutom innefattar undersökningen ett fåtal lärarenkäter där de tillfrågade lärarna uttalar sig om att bråkräkning är ett speciellt svårt ämnesområde.

Vid Växjö universitet verkar bråkräkningens problematik ha väckt många intressen. I ytterliggare en rapport skriver ett annat författarpär: "... nästan 80 procent av de elever som utförde det diagnostiska provet hade stora svårigheter med bråkräkning" (Harfacha & Jonsson, 2006, s. 23). Urvalet i denna rapport var 100 elever på gymnasiet årskurs ett vid tre olika skolor i två skilda städer. Ett av de sammanställda resultaten av de diagnoser som analyserats åskådliggörs i figur 1 nedan. Av figuren framgår tydligt att bråkräkning är ett stort bekymmer, inte mindre än 76 procent av elevsvaren på bråkuppgifterna var fel. I figuren kan man också tydligt utläsa att bråkräkningen är svårare än alla de andra delarna av gymnasie matematiken som mätts i undersökningen.



Figur 1 " Korrekta svar inom olika matematiska områden" (Harfacha & Jonsson, 2006, s. 23)

Det finns sammanställningar om elevers matematikkunskaper från nationella proven. Tyvärr trots att det finns stora internationella undersökningar så som PISA, har vi inte lyckats hitta någon sammanställning eller analys av resultaten där man kan utläsa något specifikt om bråk. De analyser som finns tillgängliga behandlar vidare begrepp inom matematiken så som problemlösningsförmåga etc. Men i en rapport från Umeå universitet behandlar författarna en uppgift som förekom på det nationella provet i matematik VT-96 för gymnasieskolans kurs A och handlade om bråk. 22 752 elever gavs möjlighet att lösa uppgiften. Uppgiften ser ut som följer (Lindström et al., 1996, s. 23):

5.

- | | | |
|---|----------------------|------|
| a) Ange två tal som har produkten 10 | Endast svar fordras. | (1p) |
| b) Ange två bråk som har summan $1/6$ | Endast svar fordras. | (1p) |
| c) Visa hur du kom fram till svaret i b). | | (1p) |

Författarna skriver följande om denna uppgift: "Elever som presterar kring poänggränsen för G har en lösningsproportion på knappt 30 % på 5b ... och elever som ligger kring poänggränsen för VG har bara 50 % löst 5b ... korrekt. Möjligen ligger huvudsvårigheten för många elever inte i taluppfattningen utan i bristande kännedom om vad produkt respektive summa innebär" (Lindström et al., 1996, s. 24). Med G respektive VG avser författarna betygen Godkänt respektive Väl Godkänt. Intressant att notera här är att en uppgift som innehåller bråkräkning tolkas av författarna som bristande kunskap om matematiska begrepp eller taluppfattning.

En författare vid namn Engström anser sig ha en radikalkonstruktivistisk syn på lärandet. Detta kan sammanfattas till att kunskap konstrueras aktivt av det lärande objektet. Lärandet är en adaptiv process som organiserar det lärande subjektets erfarenhetsvärld (fritt efter Engström, 1997, s. 39).

"De hittillsvarande intuitiva modeller, eller scheman, som eleverna byggt upp under arbetet med de naturliga talen i skolans lägre årskurser, där multiplikation ses som upprepad addition och där division ses som en invers av multiplikation, är otillräckliga. Ett bråk måste ses som ett par av tal, dels som en enskild kvantitet. De tidiga erfarenheterna barn har av tal gör att de inte uppfattar mäktigheten, dvs. uppfattar bråk som ett tal.

Till de tidiga erfarenheterna hör ... att tal har representerats med **en** symbol. Det finns en symbol-referensrelation (siffra-tal). När bråk introduceras ändras denna ett-till-ett korrespondens. Olika begreppsliga tolkningar representeras nu i en och samma symbol och ett bråk sett som en del av en helhet..."(Engström, 1997, s. 107-108).

Här diskuterar Engström den grundläggande förståelsen av bråk och att eleverna vid detta tillfälle behöver lära sig att förstå vad de tidigare uppfattat som en operation av två tal behöver de nu uppfatta som en representation av ett tal. Han hävdar också att bråket måste förstås på två olika sätt, dels som ett par av tal och dels som en enskild kvantitet. Vi kommer senare att få se att andra författare lyckas komma upp till så många som fem olika sätt att uppfatta bråk.

”Bråket en halv har funnits vara en fundamental byggsten (Hunting & Davis 1991). Det är det första bråk som barnen använder med precision. Det används av barn vid upprepade delning, halvering. ... Elever i årskurs fyra har visats använda sig av en halv som referenstal när de ska jämföra bråk med varandra” (Engström, 1997, s. 113). Här ges en inblick i hur elever börjar utvidga sin kännedom om talsystem. Bråket en halv framstår vara en naturlig utgångspunkt för eleverna, om detta beror på att det är lätt för eleverna att förstå eller om det är ett inlärt beteende som de fått sig till livs av pedagogen vågar vi inte spekulera om.

”Padberg (1989) redovisar en stor tysk undersökning med 900 elever från 34 klasser i Gymnasium (sjunde skolåret). Eleverna uppvisar inte generellt bättre prestationer med decimalbråk än allmänna bråk. Vid addition och subtraktion ligger prestationerna högre för decimalbråk, men klart lägre vid multiplikation och division.

Metodiskt har både de allmänna och decimalbråken sina för- och nackdelar. När man skall introducera de rationella talen möjliggör de allmänna bråken en större åskådlighet. Vid storleksordningar och räkneoperationer ser Padberg (1989) fördelar med en parallellbehandling. Det ger eleverna möjlighet att uppfatta de båda som olika beteckningar för samma matematiska objekt. Vid skild behandling av allmänna bråk och decimalbråk utvecklar eleverna lätt en föreställning att det handlar om två artskilda tal” (Engström, 1997, s. 123).

Nämnarens värde påverkar inte elevers förmåga att utföra matematiska operationer med bråk. Det minskar elevers förståelse om man behandlar bråk med nämnaren tio separat från bråk med andra nämnare. Vad vi finner intressant med denna text är att det är så många elever som ingår i undersökningen. Vi beklagar djupt vår bristande språkförmåga som begränsar oss från att ta del av originaltexten.

Kungliga Tekniska Högskolan i Stockholm har också uppmärksammat problemet i ett projekt kallat ”Gymnasiets mål och högskolans förväntningar i matematik”. Detta projekt är ett samarbete mellan KTH Matematik och Lärarhögskolan i Stockholm där man studerar vad man kallar glappet mellan gymnasiet och högskolans matematikkurser. En gymnasielärare i matematik uttalar sig: ”Bråkräkning är ett jätteproblem” (Thunberg & Filipsson, 2007, s. 5).

En annan av textförfattarna uttrycker: ”... rationella tal, om de behandlas utifrån olika aspekter, underbegrepp eller underkonstruktioner, kan öppna för kontakt med många av matematikens domäner, inte bara talteori utan även med geometri, algebra samt oändlighetsbegreppet...” (Runesson, 1999, s. 95). Runesson menar här att om man undervisar om rationella tal på ett som författaren menar bra sätt så är den kunskapen en tillgång för inhämtandet av framtida matematikkunskaper.

Vi ser alltså att elevers problem med bråk sträcker sig åtminstone från grundskolans årskurs sex till universitet/högskola. Hittills har vi redovisat texter från Sverige. Har man samma bekymmer i andra länder eller är det ett specifikt svenskt problem?

5.2 Utländsk litteratur

I en undersökning från Osnabrück i Tyskland på cirka 100 så kallade lågpresterande elever (antalet elever varierade lite mellan olika delar av undersökningen) i åldersgruppen 12-15 år konstateras att de bara har färdigheten att utföra beräkningar, förståelse saknas. Eller för att uttrycka det på ett annat sätt: De flesta eleverna kan bara tillämpa memorerade regler utan att veta varför reglerna fungerar. "Fractions are recognised to be a difficult topic in school-mathematics. Up to now neither new forms of teaching nor new approaches to the arithmetic of fractions have been able to alter this" (Hasemann, 1981, s. 71). Här indikeras att man har försökt med olika metoder för att bråkräkningen skall vara lättare att ta till sig men misslyckats. Som vi sett i tidigare texter så har det konstaterats att bråkräkningen är svårare än annat. Vad som är intressant här är att man har försökt komma åt problemet med olika metoder men misslyckats.

På Cypern har ett författarpär undersökt 646 sjätteklassare med avseende på hur de klarar sin bråkräkning. Utgångspunkten är att bråk är svåra att förstå då de måste förstås i sin helhet och då behöver man förstå dess underkonstruktioner vilka författarna kallar part-whole (sv. del-helhet), ratio (sv. förhållande), operator (sv. operator), quotient (sv. kvot) och measure (sv. mått). Här har de identifierat fem sätt att uppfatta ett bråk (jämför med Engströms två). Författarna är verksamma vid universitet i USA respektive Cypern och skriver: "Teaching and learning fractions has traditionally been one of the most problematic areas in primary school mathematics" (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 293). Vad som är anmärkningsvärt med denna text är att författarna utgår ifrån att det är svårt med bråk, de undersöker inte om så verkligen är fallet.

I en av de två stora internationella tidskrifterna för matematikundervisning (Educational Studies In Mathematics) presenteras en undersökning utförd på 112 elever i årskurserna ett, tre, fyra och fem. Det konstateras att eleverna använder sig av två olika strategier vid uppgifter som gäller "... equal sharing problems..." (Empson et al., 2005, s. 1). Elevernas strategier kategoriseras av författarna som Del (eng. Part) och Förhållande (eng. Ratio). Intressant att notera är att terminologin inte är samstämmig inom forskarvärlden. Charalambous och Pitta-Pantazi använder sig inte av begreppet Del.

I en genomgång av aktuell forskning skriver författarna i sin sammanfattning:

"Because the part-whole and ratio subconstructs have been shown to be fundamental to rational number development, further research in the area of initial fraction concepts is needed, in order to show how the two subconstructs relate in the growth of rational number understanding" (Pitkethly & Hunting, 1996, s. 34)

Som vi sett ovan är eleverna vana vid heltal och har svårt med övergången till bråk (Engström, 1997).

“The temptation to use the arithmetic rules of natural numbers when dealing with fractions is strong when learners do not have an adequate understanding of fractions. Operating on a symbolic level with numerators and/or denominators independently without considering their conceptual relationship indicates that the student’s concept of fractions is anchored insufficiently. Increasing resistance to the natural number distractors, which I call N-distractors (Streefland, 1984) is demonstrated by the growing ability to find arguments to refute these incorrect operations and indicates the improving quality of an operational concept of fractions (Streefland, 1986). Developing resistance to the tendency to make N-distractor errors not only is implied automatically in the production of building blocks for acquiring a firm concept of fractions; it must be accompanied intentionally by building resistance to this stubborn phenomenon” (Streefland, 1993, s. 300).

Här ser vi ett försök till förklaring på frågan varför det är så svårt att lära sig bråkräkning/förståelse. Problemet framstår att ligga i att elever har en god uppfattning och förståelse av de naturliga talen och när de ställs inför bråktalen så försöker de envist tolka dem som naturliga tal.

I en Holländsk doktorsavhandling beskrivs hur man utsatt en grupp elever i nio till tio års ålder för en experimentell undervisningsmetod som man benämner RME (realistic mathematics education) och jämför deras kunskapsnivåer med en kontrollgrupp som blivit undervisade på ett konventionellt sätt.

“- Students in the experimental condition show more proficiency in fractions than students in the control condition.
Students who perform average or above average in general mathematical skills can learn formal fractions in a meaningful manner and within reasonable time.
Low achievers in mathematics experience considerable difficulties in learning formal fractions” (Keiser, 2003, s. 152).

Den metod som betecknas RME baseras på att eleverna tillsammans med läraren undersöker meningsfulla sammanhang, detta följs av en process som de benämner matematisering vilket leder till generaliserbara och abstrakta matematiska koncept. Åter igen belyses att de så kallade lågpresterande eleverna har mycket svårt för bråkräkning.

En författare föreslår att man skall börja med procent för att därefter gå till decimaltal och först därefter till bråk. “Childrens everyday experiences provide contexts in which percentages appear and many will have intuitive ideas of what different numerical values mean” (Anghileri, 2000, s. 110). Att elever har hört talas om procent skulle alltså vara anledningen till att börja med den varianten av rationella tal. Bråk förekommer inte längre i någon stor utsträckning i vårt moderna samhälle.

Men som två tyska kollegor uttrycker det så måste man ta reda på vad elever har för förförståelse. "For mathematics teaching in the classroom it should be accepted that prior knowledge is a very important factor which has to be analysed before a new topic is introduced" (Hasemann & Mansfield, 1995, s. 69). Dessa forskare såg exempel på elever som när de för första gången i skolan ställdes inför bråkräkning redan hade en väl utvecklad förståelse av bråk.

I tidskriften *Journal of research in mathematics education* (2005) kan man läsa om en undersökning på 384 elever fördelade på 19 klasser i motsvarande vår grundskola. "... classroom practices that build on students' thinking where more likely to support shifts toward normative uses of notation" (Saxe et al., 2005, s.137). Att utgå ifrån elevers tänkande har vi inte sett hos någon annan textförfattare. Elevers förförståelse har varit ett begrepp som vi sett tidigare men denna text implicerar att elevers tänkande behöver kartläggas för att lyckas bättre i en undervisningssituation. Vidare skriver författarna att det inte är en lätt uppgift att göra en sådan kartläggning: "As students begin to construct understandings of fraction concepts and notation, their knowledge is rooted in whole number, such that a "correct" notation may be belie immature understandings of fractions. Yet at other times, students may produce unconventional representations that refer to some sophisticated intuitions about fractions" (Saxe et al., 2005, s.155). Här ser man också tecken på N-distraction vilket innebär att elever försöker tolka bråk som heltal (Streefland, 1993).

Anghileri (2000) ovan har föreslagit att det skulle vara bättre att börja undervisningen om reella tal med procent för att sedan fortsätta med decimaltal och avsluta med bråk. Detta prövas i en amerikansk undersökning på 16 elever i elementary schools fjärde klass. Försöksgruppen jämfördes med en kontrollgrupp på lika många elever. Försöksgruppen visade bättre resultat. Att notera är att undervisningen tog sin början i procent för att därefter innefatta tal med en decimal följt av tal med två och tre decimaler för att avslutas med bråk (Moss et al., 1999).

Den hittills största undersökningen vi sett där vi kan se en direkt koppling till bråk är utförd i USA. Undersökningen omfattar 1600 elever i åk 4 och 5 elementary school. Man har undersökt huruvida ett läromedelsupplägg som ingår i RNP (Rational Number Project) är bättre eller sämre än kommersiellt tillgängliga läromedel. RNP är ett projekt sponsrat av The National Science Foundation. "One product of the RNP research is a curriculum that helps students develop initial ideas about fractions by working with multiple physical models and other representations and by translating between and within these various representations" (Cramer et al., 2002, s. 113). Vidare skriver författarna: "Students using RNP project materials had statistically higher mean scores on the posttests and retention test and on four (of six) subscales: concepts, order, transfer and estimation" (Cramer et al., 2002, s. 111). Författarna slår fast att upplägget inom RNP är bättre än de andra läromedlen. Vad som är specifikt med detta läromedelsupplägg och som vi inte sett exempel på i andra texter är hur de olika inlärningsstilarna har uppmärksamats: "The RNP curriculum placed particular emphasis on the use of multiple physical models and translations within and between modes of representation-pictorial, manipulative, verbal, real-world, and symbolic" (Cramer et al., 2002, s. 111). I texten nämns visserligen inte inlärningsstilarna/intelligenserna specifikt men det är slående hur väl det stämmer överens med Lazears (1998) beskrivningar.

6 Resultatsammanfattning

Vi sammanfattar här den tolkning av texterna vi utfört i vår textanalys för att ge en mer översiktlig bild.

6.1 Var har studier utförts?

Det framgår av textanalysen att bråk och bråkräkning är ett bekymmer ifrån grundskolans årskurs fyra till universitet/högskola. Speciellt svårt är det för så kallade lågpresterande elever, försök med olika metoder har inte hjälpt denna grupp av elever. Det saknas någon sammanställning av nationella prov som specifikt uppmärksammar bråk.

6.2 Varför är bråk svårt?

Det finns olika uppfattningar om varför bråk är svårt eller så uttrycks det på olika sätt. Det nämns att bråk måste ses som ett par av tal, som en enskild kvantitet och som en symbol. Bråket delas upp i underkonstruktioner vilka man måste förstå för att få en helhetsuppfattning av bråket. Underkonstruktioner benämns del-helhet, förhållande, operator, kvot och mått. Det har framhållits att del-helhet och förhållande är viktigare än de andra underkonstruktionerna när man börjar lära sig bråk

6.3 Hur gör elever?

Elever använder sig av bråket en halv som referens så det föreslås att man som lärare skall utnyttja denna förförståelse. Upp till grundskolans årskurs fem använder sig eleverna bara av två av underkonstruktionerna nämligen del och förhållande. Dessutom försöker de envist tolka bråk som naturliga tal. Men alla har inte en dålig förförståelse.

6.4 Vad är viktigt att tänka på?

Det framförs åsikter om att det räcker att förstå nämnaren och täljarens innebörd samt att varje bråk kan skrivas på oändligt många sätt. Vad man inte skall göra är att särskilja decimalbråk från allmänna bråk. Det uppfattas då som två helt olika saker av elever. Rationella tal kan öppna upp för andra delar av matematiken så som talteori, geometri, algebra och oändlighetsbegreppet. Flera författare skriver att bråken och bråkräkningen är absolut nödvändigt för att kunna lära sig algebra. Men för att verkligen lyckas med undervisningen behöver vi ta reda på hur eleverna tänker men detta framstår som svårt.

6.5 Hur skall man göra?

Det föreslås ett antal olika varianter på hur undervisningen skall utformas. En text förespråkar att man när man börjar undervisningen om rationella tal tar sin utgångspunkt i procent för att därefter övergå till decimaltal och avslutningsvis bråk. En annan text hävdar att man på ett liknande sätt skall börja med procent därefter tal med en decimal, två decimaler, tre decimaler och först därefter bråk. I en undersökning visar författarna att det är bättre än tvärtom. Hela utbildningsprojekt har skapats där eleverna och läraren undersöker sammanhang vilket följs av matematisering vilket leder till generaliseringar och abstrakta koncept. Om man tar hänsyn till inlärningsstilarna har det visat sig att eleverna klarar sig bättre.

6.6 Varför skall man lära sig bråk?

De anledningar till att lära sig bråk som framförts i texterna är främst att bråkräkning är nödvändig för att kunna bemästra algebran (se även 3.1 Varför bråk?). Det har också framförts att rätt behandlat kan bråk öppna upp för nya delar av matematiken för elever.

6.7 Var ligger problemet?

Bråk och bråkräkning verkar vara ett sammansatt problem. Samtidigt som elever har svårt att förstå så verkar lärare ha svårt att lära ut för elever på ett begripligt sätt. En av textförfattarna har uppmärksammat detta problemet. En annan orsak kan vara att bråk och bråkräkning är omodernt i samhället och då inte används runt omkring oss i samma utsträckning som förr.

7 Diskussion

I vårt resultat har vi funnit att det finns goda belägg för att undervisningen och inläringen av bråk blir bättre av att undervisningssituationen präglas av aktivt interagerande och varierar med hänsyn till de olika inlärningsstilarna (Cramer et al., 2002; Keiser, 2003; Lazear, 1998; Gardner, 2003; Marton & Booth, 2000). Se även bilaga 1 där förslag ges på matematikundervisning så att samtliga inlärningsstilar tillgodoses. Vi har också sett exempel på redskap så som att bråket en halv med fördel kan användas som en utgångspunkt och referens då elever ofta har god förförståelse av detta (Engström, 1997). Att förstå nämnaren och täljarens innebörd och att ett bråk kan skrivas på oändligt många sätt (Löwing, 2006) ökar elevers förmåga att utföra operationer med bråk. För att förstå alla aspekter av bråk behöver man träna på förståelsen av bråkets underkonstruktioner (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Empson et al., 2005). Man skall inte skilja på decimal- och allmänbråk (Engström, 1997). Dessutom argumenteras det för att man skall lära sig rationella tal i ordningen procent, decimaltal och bråk för att ta tillvara elevers förförståelse (Anghileri, 2000; Moss et al., 1999). Att lärare skall ta tillvara på elevers förutsättningar och därmed deras förförståelse framgår tydligt i styrdokumentet (Lpo 94; Lpf 94). Bråkräkning beskrivs som en essentiell kunskap för vidare studier av matematik då främst för vidgad taluppfattning och algebra (Skolverket, 2006; Runesson, 1999; Löwing, 2002).

Vi tolkar mängden av publikationer inom ämnet som att det verkligen föreligger problem med kunskapen om bråk och bråkräkning i svenska grund- och gymnasieskolor samt att problemet följer med upp till universitetet. Det visar sig också att problemet inte är specifikt svenskt utan har uppmärksammats inom vitt spridda skolor i västvärlden. Vi har hittat didaktiska aspekter i form av att det bland annat diskuteras kring det abstrakta med bråk och bråkräkning. Det är vid elevers möte med bråk som matematiken för första gången abstraheras på allvar. Huruvida elever som har en negativ inställning till skolan har speciellt svårt med bråk har vi inte funnit någon diskussion kring. För att förstå bråk som en helhet och symbol så måste det förstås i sina delar. Vi har sett aspekter på hur elever uppfattar, förstår och använder bråk. Vissa aspekter och tolkningar av bråk framstår som mer betydande än andra. Dessutom redovisas olika undervisningsupplägg som visar på goda resultat vid dess användande. Därmed anser vi att vi uppnått de två delarna i vårt syfte: (a) Att söka modern engelsk- och svenskspråkig facklitteratur inom det matematikdidaktiska området och undersökningar med avsikt på bråkräkning. (b) Samt att lyfta fram de didaktiska aspekter på bråkräkning som vi finner vid litteraturgenomgången.

Den kvalitativa innehållsanalysen som vi använt oss av som metod för att samla data har gett oss de data som behövs för att uppnå vårt syfte. Vi tolkar det som en svaghet i vår metod att vi inte fått någon text som behandlar att bråk inte utgör något problem i undervisningssituationer eller att bråk inte är viktigt i matematikundervisningen. Möjligen hade vår urvalsmetod behövt se annorlunda ut för att täcka in texter med ett sådant innehåll. Vi har helt och hållet förlitat oss på att biblioteksdataserna och Internet-sökmotorn har försett oss med korrekt texter. Det är fullt möjligt att det finns litteratur som inte är nåbara med dessa verktyg.

Vi har tidigare nämnt att lärare behöver ett batteri av metoder för att kunna tillgodose alla elevers olika lärostilar. Ett försök att sammanfatta de intryck och kunskaper vi tagit del av under detta arbetes tillkomst för att tillföra något till detta batteri följer nedan. Listan skall ses som ett försök att så kortfattat som möjligt sammanfatta resultaten i denna undersökning. Vi gör på intet sätt anspråk på att denna lista skulle vara fullständig. Listan skall ses som vår blygsamma tolkning av modern forsknings tillämpning i matematikundervisningen om bråk. Vi har tagit vår utgångspunkt i en rapport från Skolverket vid namn Lusten att lära (Skolverket, 2003). Denna rapport har medvetet eller omedvetet en piagetansk utgångspunkt och enligt vår mening täcker den in de åtta inlärningsstilarna relativt väl. Innan vi redovisar listan är det några generella aspekter på matematikundervisningen som vi vill uppmärksamma. Ett övergripande mål med all matematikundervisning måste vara att matematiken skall abstraheras. Dock behöver eleverna utveckla förståelsen för tal innan de kan utveckla det abstrakta tänkandet (Ahlberg, 2001). Det finns behov av att avsätta mycket tid till ämnet så att alla aspekter blir behandlade och väl inövade. Det gäller att ta tillvara de små barnens nyfikenhet och öppenhet att vilja lära sig nya saker.

- 1 Börja med det konkreta.
- 2 Introducera bråken i meningsfulla sammanhang.
- 3 Använd talet $\frac{1}{2}$ som utgångspunkt och referens.
- 4 Träna flitigt på att se ett bråktal som just ett tal.
- 5 Belys tydligt och ofta de olika tolkningarna av ett bråk (del-helhet, förhållande, operator, kvot och mått).
- 6 Träna flitigt förståelsen av nämnaren, täljaren och att varje bråk kan skrivas på oändligt många sätt.
- 7 Träna förståelsen av del-helhet och förhållande begreppen extra mycket.
- 8 Belys tydligt och träna på att bråktalen är en ny typ av tal och att man inte kan jämföra dem med de naturliga talen.
- 9 Särskilj inte decimalbråk från allmänna bråk, eleverna uppfattar de då som olika saker.
- 10 Så kallade lågpresterande elever behöver extra mycket hjälp.
- 11 Verka för att alla elever aktivt deltar i lärprocessen.
- 12 Utmana eleverna
- 13 Reflektera
- 14 Variera undervisningen så att så många inlärningsstilar som möjligt tillgodoses
- 15 Prata mycket matematik (viktigt för verbal-ling.-int.)
- 16 Integrering av ämnet i och utanför skolan
- 17 Använda laborativa material från naturen (viktigt för natur-int.)
- 18 Variera uttrycksformer och undervisning

Slutligen finner vi det förvånande att det inte finns någon modern svensk statistisk undersökning om elevers bråkkunskaper. För framtida forskning i ämnet skulle vi gärna se att en sådan genomfördes.

För att fånga in eventuella texter där det uttrycks att bråkräkning inte är svårt eller ens intressant i dagens skola behövs en undersökning liknande vår genomföras men med en annan urvalsprincip.

En frågeställning som växt fram under arbetets gång är: Kan det vara så att bråkräkningen är det som gör att en hel del elever får en negativ inställning till matematik i sin helhet. Vi har sett att inhämtandet av kunskapen om bråk och bråkräkning är ett stort steg för eleverna att ta. Det innehåller många nya aspekter för eleverna så som abstraktioner, förståelsen av symboler och att de måste kunna tolka ett tal på många (fem) olika sätt. Om elever inte får denna förståelse kan det då påverka resten av matematikförståelsen?

Referenser

- *Ahlberg, A., (2001). *Lärande och delaktighet*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-01774-X
- *Anghileri, J., (2000). *Teaching number sense*. New York, London, Continuum. ISBN 0-8264-4807-0
- Bergström, G. & Boréus, K. (red), (2005). *Textens mening och makt*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-04274-4
- Carlgren, I., & Marton, F., (2002). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbundets förlag. ISBN 91-85096-865
- *Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D., (2007). *Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions*. Educational Studies in Mathematics. Hämtat 25 april 2007, från <http://www.springerlink.com/content/0610g3863800k582/fulltext.pdf>
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K., (2000). *Research Methods in Education*. London and New York: Routledge/Falmer. ISBN 0-415-19541-1
- *Cramer, K., Post, T., & delMas, R., (2002). Journal of research in mathematics education. *Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula. With the Effect of Using the Rational Number Curriculum*. Vol. 33, Number 2, March 2002.
- *Empson, S., Junk, D., Dominguez, H. & Turner, E., (2005). *Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: a cross-sectional study of children's thinking*. Educational Studies In Mathematics. Rapport nr 63:1–28.
- *Engström, A., (1997). *Reflektivt tänkande i matematik – om elevers konstruktioner av bråk*. Malmö: Graphic Systems AB. ISBN 91-22-01749-6
- *Ericsson, I., & Fredriksson, K., (2006). *Bråkräkning Brister och möjligheter. Lärarexamensarbete*. Växjö universitet: School of Mathematics and Systems Engineering, Växjö. (Rapport 06055).
- Gardner, H., (2003). *MI After Twenty Years*. Hämtat 25 april 2007, från http://www.howardgardner.com/Papers/documents/MI%20After%2020_Feb-03_HG.pdf.
- *Harfacha, C., & Jonsson, M., (2006). *Övergången till gymnasiet. En lupp som avslöjar brister i elevernas matematikkunskaper*. School of Mathematics and Systems Engineering (Report 06091). Växjö universitet. Hämtat 26 april 2007, från http://www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn_nbn_se_vxu_diva-657-2_fulltext.pdf
- *Hasemann, K., (1981). *On Difficulties With Fractions*. Educational Studies in Mathematics 12 71-87. Reidel Publishing Co.

Hämtat 26 april 2007, från

<http://www.springerlink.com/content/m4774623237117lt/fulltext.pdf>

*Hasemann, K. & Mansfield, H., (1995). *Concept mapping in research on mathematical knowledge development: background, methods, findings and conclusions*. Educational Studies In Mathematics. Rapport nr 29.

Jensen, E., (1997). *Aktiv metodik – metodboken med över 1000 idéer som underlättar inläringen*. Jönköping: Brain Books AB.

*Johansson, B., (1998). *Förkunskapsproblem i matematik?* Göteborgs universitet: Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborg. (1998-12-13).

*Keiser, R., (2003). *Teaching formal mathematics in primary education. Fraction learning as a mathematising process*. Utrecht CD-β press Center for science and mathematics education. ISBN 9073346525

Lazear, D., (1998). *Åtta sätt att undervisa*. Jönköping: Brain Books AB. ISBN 91-88410-80-3

*Lindström, J., Nyström, P. & Palm, T., (1996). *Nationellt kursprov i matematik: kurs A, C & E, Vt-96: resultat och kommentarer*. Umeå Universitet PM Nr 118.

*Löwing, M., (2002). *Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisningen*. IPD rapport 2002:11 Göteborgs universitet Institutionen för pedagogik och didaktik.

Hämtat 4 april 2007, från

<http://www.ped.gu.se/amnesdidaktik/enheten/madidteori.pdf>

*Löwing, M., (2006). *Matematikundervisningens dilemman – Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-04400-3

Marton, F., Booth, S., (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-01027-3

*Moss, J., & Case, R., (1999). Journal of research in mathematics education. *Developing children's understanding of the relational numbers: A new model and an experimental curriculum*. Vol 30, s. 122-147.

*Pitkethly, A., & Hunting, R., (1996). *A review of recent research in the area of initial fraction concepts*. Educational Studies In Mathematics. Rapport nr 30: 5-38. Kluwer Academic Publishers.

*Runesson, U., (1999). *Variationens pedagogik – skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis. ISBN 91-7346-344-2

*Saxe, G., Taylor, E., McIntosh, C. & Greahart, M., (2005). *Representing Fractions with Standard Notation: A Developmental Analysis*. Journal of research in mathematics education. Vol 36, Number 2, March 2005.

Skolverket, (2003). *Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002. Lusten att lära – med fokus på matematik*. Skolverket Rapport 221.

*Streefland, L., (1993). *Fractions: A Realistic Approach*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, c1992. Edited by: Carpenter, T. Associates by: Fennema, E., Romberg, T., Erlbaum, L. *Rational numbers. An integration of research*.

*Thunberg, H. & Filipsson, L., (2004-2005). *Gymnasielärares syn på KTHs introduktionskurs i matematik*.

Hämtat 3 april 2007, från

<http://www.math.kth.se/gmhf/gylararenkat.pdf>

Skolverket (2006). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet. Lpo 94 anpassad till att också omfatta förskoleklassen och fritidshemmet*. Stockholm: Skolverket/Fritzes. ISBN 978-91-85545-13-1.

Skolverket (2006). *Läroplan för de frivilliga skolformerna Lpf 94*. Stockholm: Skolverket/Fritzes. ISBN 978-91-85545-14-8.

Skolverket (2006). *Läroplan för förskola Lpfö 98*. Stockholm: Skolverket/Fritzes. ISBN 978-91-85545-12-4.

Skolverket (2000). Kursplaner, grundskolan, matematik.

Hämtat 11 april 2007, från

<http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0607&infotyp=23&skolform=11&id=3873&extraId=2087>

Skolverket (2000). Gymnasial utbildning, kurser, M, Matematik A (MA1201).

Hämtat 11 april 2007, från

<http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0607&infotyp=5&skolform=21&id=3202&extraId=>

Wu, H., (2000). *On the learning of algebra*. University of California, Berkeley.

Hämtat 22 maj 2007, från

<http://math.berkeley.edu/~wu/algebra1.pdf>

Biblioteksdatabaser:

GUNDA

<http://webbgunda.ub.gu.se/cgi-bin/chameleon>

Libris

<http://www.libris.kb.se/index.jsp>

Internet-sökmotor:

Google scholar

<http://scholar.google.se/>

* avser texter vilka ingår i den kvalitativa innehållsanalysen

Bilaga 1

Lazears (1998) idéer om matematikundervisning med hänsyn tagen till de olika inlärningsstilarna.

Verbal-lingvistisk intelligens:

- ”Hitta på och skriva ner några benämnda tal som andra skall lösa
- Förklara hur man löser ett problem för kamrater som samtidigt följer dina anvisningar
- Hitta på ordlekar som innehåller matematiska ord och termer
- Lösa problem tillsammans med en kamrat – den ena löser och den andra förklarar de olika stegen
- Skriva dikter som berättar när man skall använda olika matematiska procedurer” (s. 39).

Logisk-matematisk intelligens

- ”Finna obekanta storheter i ett problem
- Lära ut hur man använder räknedosan vid problemlösning
- Hitta på talföljder och låta en kamrat räkna ut hur de är uppbyggda
- Bevisa geometriska satser med hjälp av mindmaps
- Formge klassifikations-scheman för matematiska formler och operationer” (s. 53).

Visuell-spatial intelligens:

- ”Göra en intervju-undersökning av vad elever gillar/ogillar och rita diagram över resultat
- Uppskatta olika mått med hjälp av synen och känseln
- Addera, subtrahera, multiplicera och dividera med olika metoder
- Tänka igenom de olika stegen i en matematisk beräkning och sedan utföra den korrekt
- Lära sig måtten i metersystemet genom att med hjälp av synen jämföra andra mått” (s. 68).

Kroppslig-kinestetisk intelligens:

- ”Använda olika kroppsdelar för att mäta saker
- Addera och subtrahera kamrater till och från en grupp för att förstå bråk
- Formge något som kräver användning av matematiska begrepp
- Skapa och framföra en teaterpjäs där de agerande är geometriska former
- Hitta på en lek - för skolgården - som använder matematiska begrepp/operationer” (s. 84).

Musikalisk-rytmisk intelligens:

- ”Lära in matematiska beräkningar och formler genom sånger och jinglar
- Lära in addition och subtraktion med hjälp av trumslag
- Lära sig multiplikationstabellen med hjälp av ”Rytmlekar”
- Lära sig division genom att dela upp en tonfölgd i olika grupper
- Hitta på ljud för olika matematiska operationer och processer” (s. 98).

Interpersonell intelligens:

- ”Lösa komplicerade benämnda räkneuppgifter i grupp
- Göra en statistisk undersökning och beräkna procenttal
- ”Lär in – lär ut” nya matematiska processer/beräkningar
- Beskriv för en kamrat allting man gör när man löser ett problem
- Låta gruppen konstruera problem som innehåller många matematiska operationer och sedan lösa problemen” (s. 112).

Intrapersonell intelligens:

- ”Försöka finna tankemönster för olika typer av matematiska problem
- Överföra matematiska begrepp till områden utanför skolan med hjälp av ”Kunskap Insikt Användning”
- Använda styrda fantasier för att lösa komplicerade benämnda tal
- Bedöma sina starka/svaga sidor när det gäller att förstå matematik
- Uppmärksamma sinnesförändringar vid lösning av matematiska problem – anteckna orsakerna” (s. 128).

Natur-intelligens

- ”Hitta på benämnda tal som handlar om naturföreteelser
- Använda laborativa material från naturen vid lösning av matematiska problem
- Göra diagram över positiv och negativ påverkan på miljön
- Förstå naturens matematiska mönster
- Matematiska beräkningar som bygger på naturen/naturprocesser” (s. 144).

Ordförklaringar på termer enl. Lazear

”**Lär in – Lär ut**” en modell för arbete i grupp, där var och en i gruppen lär sig någonting och sedan undervisar gruppen om detta.

”**Kunskap Insikt Användning**” ett sätt att behandla ny kunskap. Vad har jag lärt mig? Vad innebär det? Hur kan jag använda den nya kunskapen?

Mindmap samma sak som ”concept map” men oftast med användning av bilder, färger, former och mönster för att uttrycka innehållet i tankar/idéer.

”**Rytmlekar**” lekar som innebär att man kommer ihåg vissa tal och talföljder med hjälp av rytmiska handklappningar och knäppningar med fingrarna” (s. 178-179).